BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

СПЕКТРАЛЬНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.М.АХМЕДОВ, Х.С.МАСИМОВА

В настоящей работе исследуются полнота собственных и корневых подпространств и другие спектральные свойства одной несамосопряженной краевой задачи в гильбертовом пространстве. Здесь, в отличие от ранее известных результатов, кроме кратной полноты системы собственных и присоединенных функций рассмотренной задачи устанавливаются также дискретность и спектральность оператора, порожденного этой задачи.

В различных задачах физики и механики возникает необходимость исследования полноты собственных и корневых подпространств и других спектральных свойств следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{i}\frac{dx}{dt}+A\,x(t)=\lambda\,x(t),\;\;0\le t\le 1, \tag{1}$$

$$B(x)\equiv x(0)-x(1)=0 \tag{2}$$

в пространстве $L_2([0,1],C^n)$, где C - комплексная плоскость.

Предположим, что оператор A действует из $L_2([0,1],C^n)$ в $L_2([0,1],C^n)$, линеен и не зависит от t.

Пусть T -замкнутый оператор в пространстве $L_2([0,1],C^n)$, порожденный дифференциальным выражением $\frac{1}{i}\frac{dx}{dt}$ и граничным условием (2). Наша цель – изучить дискретность и спектральность оператора $T+A$ и другие спектральные свойства этого оператора.

Заметим, что спектр оператора T есть множество

$$\sigma(T)=\{z;\operatorname{Im}z=0,\operatorname{Re}z=2\pi n,\;n=0,\pm1,\pm2,\dots\}.$$

Действительно,

$$e^{-i\lambda t}\cdot\frac{dx}{dt}-i\lambda e^{-i\lambda t}=0\Rightarrow\left(e^{-i\lambda t}\cdot x(t)\right)'_t=0\Rightarrow e^{-i\lambda t}\cdot x(t)=x_0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t)=x_0\cdot e^{i\lambda t},$$
$$x(0)=x_0,$$
$$x(1)=e^{i\lambda}x_0\Rightarrow e^{i\lambda}=1\Rightarrow\lambda=2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots.$$

Значить,

$$\sigma(T)=\{z;\operatorname{Im}z=0,\operatorname{Re}z=2\pi n,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\ \}.$$

Лемма 1. T является дискретным спектральным оператором, и для всех собственных значений λ соответствующий собственный проектор $\boldsymbol{E}(\lambda)$ оператора T одномерен.

Доказательство. Вместо дифференциального выражения $\tau=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}$ рассмотрим $\tau_1=\tau-\lambda$. Теперь, если T_1 - оператор, порожденный выражением τ_1 и граничным условием (2), то $0\notin\sigma(T_1)$.Пусть s -единичная сфера в $L_2([0,1],C^n)$ и $\{f_n\}$-последовательность элементов множества $T_1^{-1}(s)$.

Очевидно, что

$$f_n=T_1^{-1}g_n,\ g_n\in s.$$

Так как $L_2([0,1],C^n)$ рефлексивно, то из последовательности $\{g_n\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу g. Тогда известно, что последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, которая слабо сходится в смысле топологии пространства $L_2([0,1],C^n)$ к некоторому элементу $f\in L_2([0,1],C^n)$. Следовательно, последовательность $\{f_{n_i}\}$ равномерно ограничена и сходится к f всюду в $[0,1]$, откуда, по теореме Лебега, следует, что

$$\left\|f_{n_i-f}\right\|^2=\int_0^1\left|f_{n_i}(x)-f(x)\right|^2dx\to0.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность. Значить, множество $T_1^{-1}(S)$ компактно, так что T_1^{-1}-компактный оператор. Тогда и T^{-1} является компактным оператором. Итак, T является дискретным оператором.

Выражения (2) можно представить в виде

$$B(x)=\beta_0\,x(0)+\beta_1\,x(1), \qquad \beta_0=1,\beta_1=-1. \tag{3}$$

Покажем, что граничное условие (2) является регулярным в смысле Данфорда $[1]$. Для комплексного числа λ, положим $\sigma(\lambda,t)=e^{i\lambda t}$. Тогда из (3) имеем

$$\boldsymbol{B}(\sigma(\lambda,t))=\beta_0+\beta_1 e^{i\lambda t}=1-e^{i\lambda t}=M(\lambda). \tag{4}$$

Если написать выражение (4) в виде, подходящем под определение регулярности граничных условий в смысле Данфорда, то получим:

$$M(\lambda)=\pi_1(\lambda)+\pi_2(\lambda)e^{i\lambda},$$
$$\widetilde{M}(\lambda)=\widetilde{\pi}_1(\lambda)+\widetilde{\pi}_2(\lambda)e^{i\lambda}.$$

Ясно, что

$$\pi_1(\lambda)=\widetilde{\pi}_1(\lambda)=1,$$
$$\pi_2(\lambda)=\widetilde{\pi}_2(\lambda)=-1$$

являются многочленами нулевого порядка.

Отсюда следует, что граничное условие (2) является регулярным и, по лемме XIX.4.12 из $[1]$, оператор T является спектральным оператором.

Ясно, что все собственные значения оператора T и только они являются нулями, (притом простыми) функции $M(\lambda)$. Тогда каждый нуль функции $M(\lambda)$ является простым полюсом резольвенты оператора T. Пусть λ_0-простой нуль функции $M(\lambda)$ и, следовательно, простой полюс $R(\lambda,T)$. Покажем, что собственный проектор $\boldsymbol{E}(\lambda_0)$, соответствующий точке λ_0, одномерен. Пусть это неверно. Тогда подпространство значений проектора $\boldsymbol{E}(\lambda_0)$ по меньшей мере двумерно и поэтому существует по меньшей мере два линейно независимых решения φ_1,φ_2 уравнения $\frac{1}{i}\frac{d\varphi}{dt}=\lambda_0\varphi$, удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{B}(\varphi_{1)}=\boldsymbol{B}(\varphi_2)=0$. Отсюда следует, что $\varphi_i(\lambda_0)=c_i\sigma(\lambda_0,t), s_i=const, (i=1,2)$ и $\varphi_1(\lambda_0)$ и $\varphi_2(\lambda_0)$ линейно зависимы, что противоречит нашему предложению.

Итак, $\boldsymbol{E}(\lambda_0)$ является одномерным проектором. Лемма полностью доказана.

Теорема 1. Пусть $\lambda_0\notin\sigma(T)$ и A такой оператор, что $A(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ ограничен при некотором ν $(0\le\nu<1)$. Тогда оператор $T+A$ дискретен и его корневые элементы образуют полную систему в пространстве $L_2([0,1],C^n)$.

Доказательство. Пусть E-спектральное разложение оператора T. Тогда $\boldsymbol{E}(\delta)=0$, если δ -борелевское множество, не пересекающееся с $\sigma(T)$. Таким образом, для любого борелевского множества δ справедливо равенство

$$\boldsymbol{E}(\delta)=\sum_{\lambda\in\delta\cap\sigma(T)}\boldsymbol{E}(\lambda).$$

причем этот ряд сходится в сильной операторной топологии.

Пусть S-скалярная компонента T и $N=T-S$. Операторы S и T имеют одинаковое разложение единицы и одинаковый спектр. Кроме того,

$$\sigma(T/\boldsymbol{E}(\lambda)H)=\sigma(S/\boldsymbol{E}(\lambda)H)=\{\lambda\ \}$$

для $\lambda\in\sigma(T)$, где $H=L_2([0,1],S^n)$ и оператор $T/\boldsymbol{E}(\lambda)H$ $(S/\boldsymbol{E}(\lambda)H)$ является сужением оператора T (оператора S) на подпространство $\boldsymbol{E}(\lambda)H$ $(\boldsymbol{E}(\lambda)H)$. Но так как $\boldsymbol{E}(\lambda)H$ одномерен, то $Tx=Sx=\lambda x$ для x из $E(\lambda)H$. Отсюда следует, что N -нулевой оператор. Тогда $T=S$. Так что, T-оператор скалярного типа. С другой стороны, T- не только оператор скалярного типа, но и он является самосопряженным оператором; так как $\sigma(T)=\{2\pi n\}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, то он также дискретен.

Кроме того, мы можем предполагать, что $\lambda_0=0$, ибо $T+A=(T-\lambda_0 I)+(A+\lambda_0 I)$ и $\sigma(T-\lambda_0 I)=\{\lambda-\lambda_0;\ \lambda\in\sigma(T)\}$.

Тогда, по предположению, $AT^{-\nu}$ ограничен.

Представим оператор $T+A$ в виде

$$T+A=(I+AT^{-1})T$$

Оператор T^{-1} компактен и, так как $AT^{-1}=AT^{-\nu}T^{-(1-\nu)}$, то AT^{-1} также компактен. Оператор $I+AT^{-1}$ аннулируется только в нуле и ограниченно-обратим. Более того,

$$(I+AT^{-1})^{-1}=I+\boldsymbol{B},$$

где B -некоторый компактный оператор.

Таким образом, оператор $(T+A)^{-1}$ допускает представление

$$(T+A)^{-1}=G(I+\boldsymbol{B}),$$

где $G=T^{-1}$.

Заметим, что спектр оператора G есть множество

$$\sigma(G)=\left\{\frac{1}{2\pi n}\right\}\quad (n=\pm1,\pm2,\ldots)$$

и поэтому он является оператором Гильберта-Шмидта.

Обозначим $(T + A)^{-1}$ через T_1, тогда оператор $T_1^* = (I + \boldsymbol{B}^*)H$ удовлетворяет всем условиям теоремы М.В.Келдыша (см., например, [2], стр.314).

С другой стороны,

$$T_1 = (I + \boldsymbol{B}^*)^{-1} T_1^* (I + \boldsymbol{B}^*). .$$

Тогда и корневые элементы оператора T образуют полную систему в пространстве $L_2([0,1], C^n)$.

Теперь рассмотрим оператор T^k, где T-исходный оператор, а k-нечетное натуральное число. Легко сделать вывод, что каждый проектор $\boldsymbol{E}(\lambda, T^k)$, соответствующий точке $\lambda \in \sigma(T^*)$, одномерен, а при k-четном этого утверждать нельзя. Этот факт прямо следует из вида собственных значений оператора T^k и леммы 1.

Очевидно, что $\boldsymbol{D}(T^k)$ состоит из всех функций $x(t) \in L_2([0,1], C^n)$, имеющих $k-1$ абсолютно непрерывные производные, удовлетворяющие условиям:

$$x^{(l)}(0) = x^{(l)}(1) \quad (l = 0,1,2,\ldots,k-1),$$
$$x^{(k)}(t) \in L_2([0,1], C^n).$$

Рассмотрим

$$d_n = \inf_{m;m\neq n} |\lambda_n - \lambda_m| \quad (n, m = 1,2,3,\ldots),$$

где $\lambda_n \in \sigma(T^*)$ $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$. Тогда из соотношения $\lambda_n = (2\pi n)^k$, следует, что при достаточно больших n верны неравенства

$$c_1 (n-1)^{k-1} \le d_n \le c_2 n^{k-1}, \quad \begin{pmatrix} c_i = const, \, i = 1,2 \\ n = 1,2,3,\ldots \end{pmatrix}.$$

Пусть $k = 2m+1$. Заметим, что если $k\nu < k - \frac{3}{2}$, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i^{-n} (|\lambda_i| + d_i)^{2\nu}$$

сходится. В нашем случае этот ряд мажорируется со следующим сходящимся рядом

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{-4m} . |n|^{2\nu(2m+1)}.$$

Верна следующая

Теорема 2. Пусть A-такой замкнутый оператор, что $D(T^{k\nu}) \subset D(A)$ при $0 < \nu < \frac{k - 3/2}{k}$ и нечетен.

Тогда $T^k + A$ является дискретным спектральным оператором.

Доказательство этой теоремы прямо следует из следующей теоремы.

Теорема 3 (см. [1], стр. 385). Пусть T-дискретный спектральный оператор в слабо полном пространстве X и пусть E-его разложение единицы. Предположим, что проектор $E(\lambda)$ одномерен для всех точек λ спектра, за возможным исключением конечного их числа. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$, $0 \le \nu < 1$ и P-такой оператор, что $D(P) \supset D((T - \lambda_0 I)^\nu)$, а оператор $P(T - \lambda_0)^{-\nu}$ ограничен. Пусть $\{\lambda_n\}$ есть спектр оператора T.Обозначим через d_n расстояние от точки $\lambda_n \in \sigma(T)$ до множества $\sigma(T)$-$\{\lambda_n\}$. Тогда если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-1}\left(|\lambda_n| + d^n\right)^\nu < \infty,$$

то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-2}\left(|\lambda_n| + d^n\right)^{2\nu} < \infty,$$

и X-гильбертово пространство, то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор.

Замечание. Отметим, что вопросам полноты собственных и корневых подпространств задач типа (1), (2) посвящены работы [3] и [4], где в отличие от настоящей работы установлены кратная полнота собственных и присоединенных функций рассмотренных несамосопряженных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц. Линейные операторы. Спектральные операторы. Из-во Мир. Москва, 1974, 662 стр.
2. Гохберг Г.И., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.,1965, 448 стр.
3. А.М.Ахмедов. О безусловной сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных элементов неограниченных полиномиальных операторных пучков. -ДАН СССР, т.293, №3, 1987, стр.521-524.
4. А.М.Ахмедов, Н.Г.Кулиев. Спектральность одного класса дифференциальных операторов. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, 2005, №2, стр.

BİR SİNİF ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN DİFERENSİAL OPERATORLARIN SPEKTRALLIĞI

Ə.M.ƏHMƏDOV, H.S.MƏSİMOVA

ANNOTASİYA

İşdə Hilbert fəzasında bir öz-özünə qoşma olmayan sərhəd məsələsinin məxsusi və köklü alt fəzalar sisteminin tamlığı və digər xassələri tədqiq olunmuşdur. Burada məlum nəticələrdən fərqli olaraq məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin çoxqat tamlığından əlavə, baxılan məsələnin doğurduğu operatorun diskretliyi və spektrallığı da öyrənilmişdir.

SPEKTRALICITY OF A CLAS NON-SELF ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATORS

A.M.AKHMEDOV, H.S.MASIMOVA

ABSTRACT

In present work the completeness of system of eigen-and root subspaces and other spectral properties of a non-self adjoint boundary value problem in Hilbert spase are investigated.Here, in contrast to earlier known results, beside the multiple completeness of system of eigen-and adjoint functions of considering problem, are established also decreetness and spektralicity of the operator, which is generated by this problem.